IV. 1a. Wir lösen die Aufgabe in 3 Schritten.

Schritt 1: Wir zeichnen für das Gewinnereignis E: „Wir ziehen – in dieser Reihenfolge – die Buchstaben B, R, I, E, F“ das zugehörige **reduzierte Baumdiagramm**, in das wir nur die Pfade eintragen, die zum Gewinnereignis E gehören (**Gewinnpfade**). Das ist hier nur ein einziger Pfad.

Schritt 2: Wir tragen in das Baumdiagramm die **Übergangswahrscheinlichkeiten** ein. Zu Beginn befinden sich 26 mögliche Kugeln in der Trommel (m = 26), eine davon ist für uns günstig (g = 1); also erhalten wir beim ersten Übergang eine Übergangswahrscheinlichkeit (Laplace-Wahrscheinlichkeit) von $^1/_{26}$.
Da in den Folgeziehungen immer eine Kugel weniger in der Trommel ist, verändern sich die folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten im Nenner so wie im folgenden Baumdiagramm angegeben. Der Zähler ist stets 1, da jeder Buchstabe nur einmal in der Trommel vorhanden ist.

$$\xrightarrow{\frac{1}{26}} B \xrightarrow{\frac{1}{25}} R \xrightarrow{\frac{1}{24}} I \xrightarrow{\frac{1}{23}} E \xrightarrow{\frac{1}{22}} F$$

Schritt 3: Wir wenden entlang des Pfades die **Pfadmultiplikationsregel** an und berechnen so die **Pfadwahrscheinlichkeit**. Wir erhalten:

Pfadwahrscheinlichkeit =

Da es nur einen Gewinnpfad gibt, ist das schon die Lösung. Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim 5-stufigen Ziehen (ohne Zurücklegen) aus der Trommel mit den Buchstaben des deutschen Alphabets die Buchstaben – in der Reihenfolge – B, R, I, E und F zu ziehen, beträgt 0,000.000.126.700.

1b. Hier sieht das reduzierte Baumdiagramm wie folgt aus:

$$\xrightarrow{\frac{1}{26}} R \xrightarrow{\frac{1}{25}} A \xrightarrow{\frac{0}{24}} A \xrightarrow{\frac{1}{24}} B \xrightarrow{\frac{1}{23}} E$$

Bei der Eintragung der Übergangswahrscheinlichkeiten gibt es beim dritten Übergang aber ein Problem: da zu Beginn der Ziehung nur eine Kugel mit dem Buchstaben A in der Trommel war und wir ohne Zurücklegen ziehen, kann der Buchstabe A nicht zweimal gezogen werden. Die dritte Übergangswahrscheinlichkeit ist als 0 ($^0/_{24}$). Und damit ergibt sich beim Multiplizieren der Übergangswahrscheinlichkeiten längs des Pfades die Pfadwahrscheinlichkeit 0 .

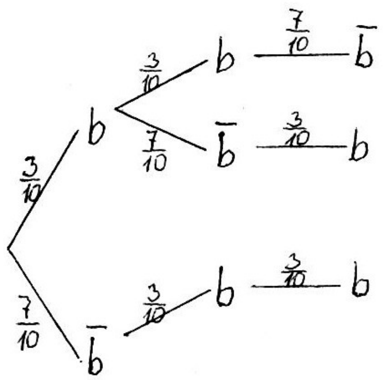
Also gilt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim 5-stufigen Ziehen (ohne Zurücklegen) aus der Trommel mit den Buchstaben des deutschen Alphabets die Buchstaben – in der Reihenfolge – R, A, A, B und E zu ziehen, beträgt 0 (unmögliches Ereignis).

2a. Wir lösen die Aufgabe in 4 Schritten:

Schritt 1: Wir zeichnen für das Gewinnereignis E: „genau 2 mal blau“ das zugehörige **reduzierte Baumdiagramm**, in das wir nur die Pfade eintragen, die zum Gewinnereignis E gehören (Gewinnpfade). Dabei unterscheiden wir nur Pfade mit Übergängen der Form b oder . Wir fassen also die Pfade mit Übergängen der Form grün und weiß zu einem Übergang (nicht b) zusammen. Die Gewinnpfade müssen 2-mal b und einmal enthalten.

Schritt 2: Wir tragen in das Baumdiagramm die **Übergangswahrscheinlichkeiten** ein. Zu Beginn befinden sich 10 Kugeln in der Trommel (m = 10), drei davon sind blau, also für uns günstig (g = 3), 7 davon sind nicht-blau, also ungünstig (g‘ = 7). Also erhalten wir beim ersten Übergang eine Übergangswahrscheinlichkeit (Laplace-Wahrscheinlichkeit) von $^3/_{10}$ für blau (b) und von $^7/_{10}$ für nicht-blau ().
Da vor den Folgeziehungen immer die vorher gezogene Kugel zurückgelegt wird, ändert sich an diesen Übergangswahrscheinlichkeiten in den Folgeziehungen nichts. Entsprechend tragen wir die Übergangswahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm

ein.



Schritt 3: Wir wenden entlang der 3 Gewinnpfade die Pfadmultiplikationsregel an und berechnen so die 3 **Pfadwahrscheinlichkeiten**. Wir erhalten:

P(bb = ; P(b = ;

P() =

Schritt 4: Wir wenden die Pfadadditionsregel an, um die 3 einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten zur Wahrscheinlichkeit des Gewinnereignisses zusammenzuzählen:

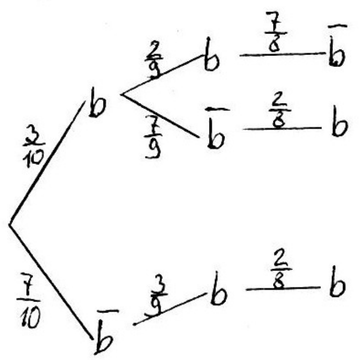
P(E) = P(mindestens 2-mal blau) = + + = 0,189

Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim 2-stufigen Ziehen (mit Zurücklegen) aus der Trommel mit den 10 Kugeln genau 2-mal blau zu ziehen, beträgt $^{189}/_{1000}$.

2b. Wir lösen die Aufgabe in 4 Schritten:

Schritt 1: wie bei 2a)

Schritt 2: Wir tragen in das Baumdiagramm die **Übergangswahrscheinlichkeiten** ein. Zu Beginn befinden sich 10 Kugeln in der Trommel (m = 10), drei davon sind blau, also für uns günstig, (g = 3), 7 davon sind nicht-blau, also ungünstig (g‘ = 7). Also erhalten wir beim ersten Übergang eine Übergangswahrscheinlichkeit (Laplace-Wahrscheinlichkeit) von $^{3}/_{10}$ für blau (b) und von $^{7}/_{10}$ für nicht-blau ().
Da nach den Ziehungen die vorher gezogene Kugel diesmal nicht zurückgelegt wird, ändern sich diese Übergangswahrscheinlichkeiten in den Folgeziehungen von Stufe zu Stufe. Man muss jedes Mal neu überlegen: Wieviel Kugeln sind noch in der Trommel ? Das liefert m. Und: Wieviel davon sind jetzt noch blau bzw. nicht-blau ? Das liefert g .
Entsprechend tragen wir die Übergangswahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm ein.



Beachte: die Übergangswahrscheinlichkeiten hinter einer Verzweigung ergeben addiert stets 1 , wenn alle Zweige dahinter gezeichnet wurden.

Schritt 3: Wir wenden entlang der 3 Gewinnpfade die **Pfadmultiplikationsregel** an und berechnen so die 3 **Pfadwahrscheinlichkeiten**. Wir erhalten:

P(bb = ; P(b = ;

P() =

Schritt 4: Wir wenden die **Pfadadditionsregel** an, um die 3 einzelnen **Pfadwahrscheinlichkeiten** zur Wahrscheinlichkeit des Gewinnereignisses zusammenzuzählen:

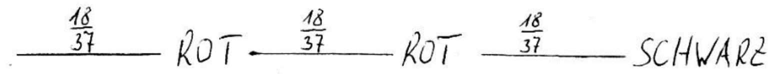
P(E) = P(mindestens 2-mal blau) = + + = 0,175

Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim 2-stufigen Ziehen (ohne Zurücklegen) aus der Trommel mit den 10 Kugeln genau 2-mal blau zu ziehen, beträgt $^{7}/_{40}$.

3a. Wir lösen die Aufgabe in 3 Schritten:

Schritt 1: Wir zeichnen für das Gewinnereignis E: „ROT,. ROT, SCHWARZ“ das zugehörige **reduzierte Baumdiagramm**, in das wir nur die Pfade eintragen, die zum Gewinnereignis E gehören (Gewinnpfade). Hier gibt es im reduzierten Baumdiagramm nur einen **Gewinnpfad**, da ja die Reihenfolge der Ergebnisse festgelegt ist.

Schritt 2: Wir tragen in das Baumdiagramm die **Übergangswahrscheinlichkeiten** ein. Auf dem Drehteller beim Roulette-Spiel befinden sich stets 37 gleichgroße Fächer (Gleichwahrscheinlichkeit) – es gibt also 37 mögliche Ergebnisse bei jeder Drehung: also m = 37. Von den 37 Fächern gehören 18 zum Ereignis ROT (g_r = 18) und auch 18 zum Ereignis SCHWARZ (g_s = 18). Also gilt für die Übergangswahrscheinlichkeiten in beiden Fällen $^{18}/_{37}$. Das ist vor jeder neuen Drehung unverändert. Entsprechend tragen wir die Übergangswahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm ein.



Schritt 3: Wir wenden entlang des einzigen Gewinnpfades die **Pfadmultiplikationsregel** an und berechnen so die **Pfadwahrscheinlichkeit**. Wir erhalten:

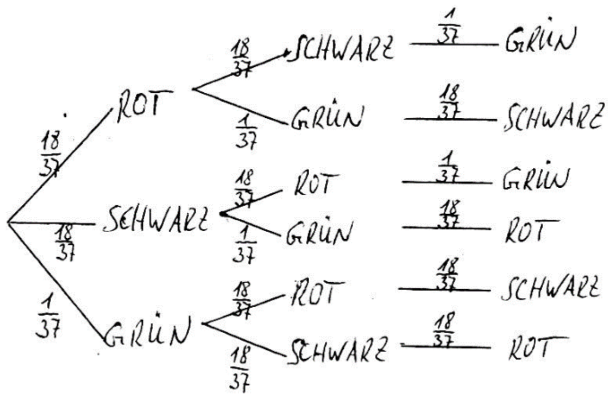
P(ROT, ROT, SCHWARZ = ;

Da es nur einen Gewinnpfad gibt bei dieser Aufgabe ist das auch schon das Ergebnis. Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim 3-stufigen Drehen des Roulette-Tellers die Reihenfolge ROT-ROT-SCHWARZ zu erhalten, beträgt $^{5832}/_{50653}$ 0,1151 .

3b. Wir lösen die Aufgabe in 4 Schritten:

Schritt 1: Wir zeichnen für das Gewinnereignis E: „alle 3 Farben“ das zugehörige **reduzierte Baumdiagramm**, in das wir nur die Pfade eintragen, die zum Gewinnereignis E gehören (Gewinnpfade). Hier gibt es im reduzierten Baumdiagramm 6 Gewinnpfade, da ja nur die Unterschiedlichkeit der Farben bei jeder Drehung verlangt wird, aber nichts über die Reihenfolge der Farben festgelegt ist.

Schritt 2: Wir tragen in das Baumdiagramm die **Übergangswahrscheinlichkeiten** ein. Auf dem Drehteller beim Roulette-Spiel befinden sich stets 37 gleichgroße Fächer (Gleichwahrscheinlichkeit) – es gibt also 37 mögliche Ergebnisse bei jeder Drehung: also m = 37. Von den 37 Fächern gehören 18 zum Ereignis ROT (g_r = 18) und auch 18 zum Ereignis SCHWARZ (g_s = 18) und eins zum Ereignis GRÜN (g_g = 1). Also beträgt die Übergangswahrscheinlichkeiten in den Fällen ROT und SCHWARZ $^{18}/_{37}$ und im Fall GRÜN $^{1}/_{37}$. Das ist vor jeder neuen Drehung unverändert. Entsprechend tragen wir die Übergangswahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm ein.



Schritt 3: Wir wenden entlang der einzelnen Gewinnpfade die **Pfadmultiplikationsregel** an und berechnen so die Pfadwahrscheinlichkeit. Da in allen Gewinnpfaden einmal

ROT einmal SCHWARZ und einmal GRÜN auftritt, treten längs jedes Gewinnpfades 2-mal die Übergangswahrscheinlichkeiten $^{18}/_{37}$ auf und einmal die Übergangswahrscheinlichkeit $^{1}/_{37}$ - allerdings jedes Mal in einer anderen Reihenfolge. Wir erhalten dann für jeden Gewinnpfad die gleiche Pfadwahrscheinlichkeit, nämlich z.B.

P(ROT, SCHWARZ, GRÜN = ;

Und für die anderen 5 Gewinnpfade entsprechend.

Schritt 4: Wir wenden die **Pfadadditionsregel** an, um die 6 einzelnen – aber gleichgroßen – Pfadwahrscheinlichkeiten zur **Gesamtwahrscheinlichkeit** des Gewinnereignisses zusammenzuzählen:

P(E) = P(alle drei Farben) = + + + + + =

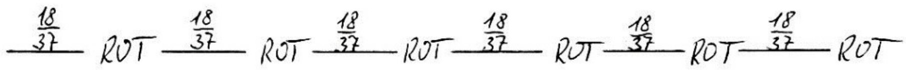
= = 0,0384

Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim 3-stufigen Drehen des Roulette-Tellers das Ereignis „alle drei Farben“ zu erhalten, beträgt $^{1944}/_{50653}$.

4. Wir lösen die Aufgabe in 3 Schritten:

Schritt 1: Wir zeichnen für das Gewinnereignis E: „6-mal nacheinander ROT“ das zugehörige **reduzierte Baumdiagramm**, in das wir nur die Pfade eintragen, die zum Gewinnereignis E gehören (Gewinnpfade). Hier gibt es im reduzierten Baumdiagramm nur einen Gewinnpfad.

Schritt 2: Wie in Aufgabe 3. benutzen wir als Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einstufigen Roulette-Spiel die Farbe ROT erscheint, den Wert $^{18}/_{37}$. Wir tragen diesen Wert in das Baumdiagramm als Übergangswahrscheinlichkeiten ein.



Schritt 3: Wir wenden entlang der einzelnen Gewinnpfade die **Pfadmultiplikationsregel** an und berechnen so die **Pfadwahrscheinlichkeit**. Wir erhalten:

P(6-mal in Folge ROT = ;

Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim 6-stufigen Drehen des Roulette-Tellers das Ereignis „5-mal in Folge ROT“ zu erhalten, beträgt 0,0133 oder 1,33% . Also hat Schlaumeier nicht ganz Recht; die Wahrscheinlichkeit ist in der Nähe von 1%, aber sie ist nicht weniger als 1% .

V. 1. Wenn man diese Aufgabe mit einem Baumdiagramm und den Pfadregeln lösen wollte, müsste man sehr viele Gewinnpfade zeichnen, weil die gewünschten 6en irgendwann im Laufe der 5 Würfe kommen könnten. Deswegen ist es hier einfacher, das **Gegenereignis** zu betrachten, weil dazu wesentlich weniger Gewinnpfade gehören.

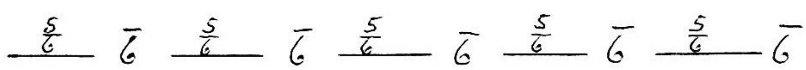
Das in der Aufgabe angesprochene Gewinnereignis E lautet: „Mindestens eine 6 bei 5 Würfen“.

Das zugehörige Gegenereignis lautet: „Keine 6 bei 5 Würfen“.

Die Wahrscheinlichkeit für dieses Gegenereignis bestimmen wir in 3 Schritten:

Schritt 1: Wir zeichnen für das Gewinnereignis das zugehörige **reduzierte Baumdiagramm** – es besteht aus nur einem **Gewinnpfad**.

Schritt 2: Wir tragen in das Baumdiagramm die **Übergangswahrscheinlichkeiten** ein. Da beim einstufigen Würfelwurf mit einem 6-flächigen fairen Würfel das Ereignis „keine 6“ mit der Wahrscheinlichkeit $^{5}/_{6}$ erscheint (Anzahl der möglichen Ergebnisse: m = 6 ; Anzahl der günstigen Ereignisse: g = 5), tragen wir diesen Wert in das Baumdiagramm 5 mal als Übergangswahrscheinlichkeit ein.



Schritt 3: Wir wenden entlang der einzelnen Gewinnpfade die **Pfadmultiplikationsregel** an und berechnen so die **Pfadwahrscheinlichkeit**. Wir erhalten:

P(= P(keine 6 bei 5 Würfen) =

Aufgrund der **Regel über die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses** gilt dann:

P(mindestens eine 6 beim 5-stufigen Würfeln) = P(E) = 1 – P() = 1 -   =

Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim 5-stufigen Würfeln mit einem fairen 6-flächigen Würfel mindestens eine „6“ zu werfen, beträgt etwa 0,5981 .

2. Wenn man diese Aufgabe mit einem Baumdiagramm und den Pfadregeln lösen wollte, müsste man sehr viele Gewinnpfade zeichnen, weil der gemeinsame Geburtsmonat nicht festgelegt ist und weil nicht festgelegt ist, wie viele Personen und welche Personen einen gleichen Geburtsmonat haben – es müssen nur mindesten 2 sein.. Deswegen ist es hier einfacher, das **Gegenereignis** zu betrachten, weil dazu wesentlich weniger Gewinnpfade gehören.
Das in der Aufgabe angesprochene Gewinnereignis E lautet: „Mindestens zwei Personen haben im gleichen Monat Geburtstag“.
Das zugehörige Gegenereignis lautet: „Alle Personen haben in einem anderen Monat Geburtstag“ oder „Es gibt keine 2 Personen, die im gleichen Monat Geburtstag haben“ .
Die Wahrscheinlichkeit für dieses Gegenereignis bestimmen wir in 3 Schritten:

Schritt 1: Wir zeichnen für das Gewinnereignis das zugehörige **reduzierte Baumdiagramm** – es besteht aus nur einem **Gewinnpfad**. Dabei ist der Monat, den die erste Person nennt völlig gleichgültig – es kann einer der 12 möglichen Monate sein. Nur danach entfällt dieser Monat als Geburtsmonat für die zweite Person. Und für die dritte Person entfallen die 2 vorgenannten Monate und so weiter. Jede weitere Person darf nur einen der bis dahin nicht genannten Monate als Geburtsmonat nennen.

Schritt 2: Wir tragen in das Baumdiagramm die **Übergangswahrscheinlichkeiten** ein. Wir gehen davon aus, dass alle 12 Monate als Geburtsmonat gleichwahrscheinlich sind (was in der Realität wohl nicht ganz stimmen wird). Dann hat jeder der 12 Monate die Wahrscheinlichkeit $^{1}/_{12}$, als Geburtsmonat genannt zu werden. Da die erste Person noch frei wählen kann, beträgt die erste Übergangswahrscheinlichkeit 1 (12 mögliche Monate und 12 günstige Monate). Für die zweite Person sind dann nur noch 11 Monate von 12 möglichen Monaten günstig; die zweite Übergangswahrscheinlichkeit beträgt also $^{11}/_{12}$. Und so weiter. Wir tragen diese Übergangswahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm ein.

$\xrightarrow{1}$ beliebiger Monat $\xrightarrow{\frac{11}{12}}$ anderer als vorgenannter Monat $\xrightarrow{\frac{10}{12}}$ anderer als vorgenannte Monate $\xrightarrow{\frac{9}{12}}$ anderer als vorgenannte Monate $\xrightarrow{\frac{8}{12}}$ anderer als vorgenannte Monate $\xrightarrow{\frac{7}{12}}$ anderer als vorgenannte Monate

Schritt 3: Wir wenden entlang der einzelnen Gewinnpfade die **Pfadmultiplikationsregel** an und berechnen so die Pfadwahrscheinlichkeit. Wir erhalten:
P(= P(keine 6 bei 5 Würfen) =
Aufgrund der **Regel über die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses** gilt dann:
P(mindestens 2 Personen mit gleichem Geburtsmonat) = P(E) = 1 – P()
= 1 -   =
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 6 Personen mindestens 2 den gleichen Geburtsmonat haben, beträgt etwa 0,7772 .