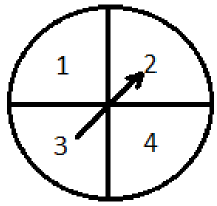
zum Thema

– als Vorbereitung auf eine Klassenarbeit

I. Arithmetischer Mittelwert

1. Frau K. sucht einen neuen Job als pharmazeutisch-technische Angestellte (PTA). Bei ihrer Internetrecherche findet sie für die Tätigkeit als berufserfahrene PTA bei einer wöchentlichen Arbeitszeit von 38 Stunden folgende Gehaltsangebote (in Euro):
   1840, 1950, 2100, 1780, 2025, 2025, 1900, 1850, 2100, 2210, 1980, 2140
   Berechne den Arithmetischen Mittelwert für die Gehaltsangebote.

2. Wir drehen die nebenstehende Drehscheibe zweimal und bilden die Summe der dabei erschienenen Zahlen (Augensumme). Beispiel: Wir drehen beim ersten Mal eine 4 und beim zweiten Mal eine 2 – dann lautet das Ergebnis für die Summe der gedrehten Zahlen (also die Augensumme) bei diesem zweistufigen Zufallsexperiment $4 + 2 = 6$.
   Die Ergebnismenge bei diesem Spiel ist dann gegeben durch die Menge $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
   Dieses Spiel wiederholen wir mehrfach. Die folgende Tabelle gibt die absoluten Häufigkeiten für die dabei auftretenden Ergebnisse an.



<table>
<tr><th>Summe der Zahlen (Augensumme)</th><th>Strichliste</th><th>absolute Häufigkeit</th></tr>
<tr><td>2</td><td>|||| ||</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>|||| |||| ||</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>|||| |||| |||| |||</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>|||| |||| |||| |||| |||| ||</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>|||| |||| |||| |||| |</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>|||| ||||</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>|||| |</td><td></td></tr>
</table>

Berechne den Arithmetischen Mittelwert für die Summe der Augensumme.

II. Zentralwert, Quartile, Boxplot

1. Nach dem Deichbrand-Festival im letzten Jahr wurden bei einer kleinen Umfrage einer Regionalzeitung 110 Festivalbesucher nach dem Grad ihrer Zufriedenheit mit dem Festival befragt. Die Organisatoren der Umfrage hatten folgende Antwortkategorien vorgegeben: maßlos enttäuscht, sehr enttäuscht, enttäuscht, neutral, begeistert, sehr begeistert, maßlos begeistert .
   Die Umfrage ergab folgende absolute Häufigkeiten:

maßlos enttäuscht	sehr enttäuscht	enttäuscht	neutral	begeistert	sehr begeistert	maßlos begeistert
3	5	12	19	38	25	8

   Bestimme den Zentralwert (zweites Quartil, Median), das erste und das dritte Quartil und zeichne ein Boxplot-Diagramm.

2. Die Einwohner in einem Neubaugebiet wurden nach ihren monatlichen Haushaltseinkommen befragt. Hier die Ergebnisse dieser kleinen Erhebung (in Euro):
   2830, 2550, 3200, 1980, 2460, 2910, 3860, 3220, 4390, 6120, 4630, 2460, 2550, 2100, 2744
   Bestimme den Zentralwert (zweites Quartil, Median, das erste und das dritte Quartil und zeichne ein Boxplot-Diagramm.

III. Laplace-Wahrscheinlichkeit

1. Beim Roulette gibt es beim einmaligen Drehen der Scheibe 37 mögliche Ergebnisse; die Ergebnismenge lautet $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, 35, 36\}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim einmaligen Drehen eine Quadratzahl zu erhalten ? Tipp: alle 37 Zahlen haben die gleiche Chance.

2. Wir betrachten einen außen blau gefärbten Würfel. Wir zerschneiden diesen Würfel in allen drei Raumrichtungen in 20 gleichdicke Scheiben und erhalten dadurch 8000 gleichgroße kleine Würfel (Warum 8000 ? Erläutere kurz). Diese füllen wir in ein Säckchen und mischen gut durch. Dann ziehen wir einen kleinen Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dabei einen Würfel mit a) einer b) keiner gefärbten Seite zu erhalten ? Erläutere Deine Lösung kurz !

3. Wir drehen die nebenstehende Drehscheibe zweimal und bilden die Augensumme der gedrehten Zahlen. Beispiel: beim ersten Drehen erscheint eine 2, beim zweiten Drehen eine 3; dann beträgt das Ergebnis dieses Zufallsexperiments (die Augensumme) $2 + 3 = 5$. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Augensummen.
   Bem.: die drei Sektoren auf der Drehscheibe sind gleich groß.

4. Wir werfen den Würfel mit dem nebenstehenden Netzplan (alle Felder gleich groß) zweimal und bilden das Augenprodukt. Bespiel: beim ersten Wurf eine 1, beim zweiten Wurf eine 3; dann lautet das Ergebnis dieses Zufallsexperiments (das Augenprodukt) $1 \cdot 3 = 3$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Zufallsspiel das Augenprodukt 2 zu erhalten ?

IV. Pfadregeln

1. In einer Trommel befinden sich die 26 Buchstaben des deutschen Alphabets. Wir ziehen aus dieser Trommel 5-stufig ohne Zurücklegen. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, bei dieser Ziehung nacheinander die Buchstaben a) B R I E F b) R A A B E (in dieser Reihenfolge) zu ziehen ?

2. In einer Trommel befinden sich 2 rote Kugeln, 3 blaue Kugeln und 5 weiße Kugeln. Wir ziehen aus dieser Trommel 3-stufig a) mit Zurücklegen b) ohne Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dabei genau 3-mal „blau“ zu ziehen ?

3. Beim Roulette sind von den 37 möglichen Zahlen (0, 1, 2, ……., 35, 36) 18 rot gefärbt, 18 schwarz gefärbt und eine (die „Null“) grün gefärbt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man beim Drehen der Scheibe mit den 37 Zahlen
   a) nacheinander erst ROT, dann wieder ROT und dann SCHWARZ
   b) alle drei Farben ? Tipp: alle 37 möglichen Ergebnisse haben die gleiche Chance.

4. Beim Roulette sind von den 37 möglichen Zahlen (0, 1, 2, ……., 35, 36) 18 rot gefärbt, 18 schwarz gefärbt und eine (die „Null“) grün gefärbt. Kuddeldaddeldu, der schusselige Seemann, kommt vom Roulette-Spiel und berichtet: „Bei einer Spielserie erschien heute 6-mal nacheinander ROT.“ Schlaumeier behauptet: „Das ist fast unmöglich. Beim 6-maligen Drehen passiert das in weniger als 1% der Fälle.“ Hat er Recht ?

V. Regel über das Gegenereignis

1. Wir werfen einen fairen 6-flächigen Würfel (beschriftet mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6) 5-mal nacheinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei diesem Zufallsspiel mindestens eine „6“ zu erhalten ?

2. In einem Raum befinden sich 6 Personen. Wir fragen die erste Person nach ihrem Geburtsmonat. Danach fragen wir die anderen Personen nach ihrem Geburtsmonat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei mindestens 2 Personen denselben Geburtsmonat angeben ?

I. 1. Wir addieren die Gehaltsangebote und teilen durch die Anzahl der Angebote (hier: 12)

Der Arithmetische Mittelwert der 12 Angebote beträgt etwa 1992€ .

2. Wir bestimmen aus der Strichliste die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Augensummen:

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	Summe
absolute Häufigkeit	7	12	18	27	21	9	6	100

Dann addieren wir diese absoluten Häufigkeiten, um zu wissen, wie oft das Zufallsexperiment durchgeführt wurde: wir erhalten $7 + 12 + 18 + 27 + 21 + 9 + 6 = 100$.
Schließlich berechnen wir den Arithmetischen Mittelwert so:

Der Arithmetische Mittelwert für die Augensumme beträgt 4,94 . Diesen Wert nennt man auch den „mittleren Wert für die Augensumme“ .

II. 1. Da die Ergebnisse der Befragung schon geordnet sind, übernehmen wir diese Art der Ordnung. Man könnte die einzelnen Ausprägungen mit Ziffern versehen (maßlos enttäuscht: 1 ; sehr enttäuscht: 2 ; ….) und hätte damit auch eine Rangskala.
Da insgesamt 110 Personen befragt wurden, ist das der Umfang unserer Befragung.
Wir bestimmen nun das erste Quartil: wir teilen 110 durch 4 und erhalten 27,5 . Diesen Wert runden wir auf und erhalten 28. Das erste Quartil steht also an der 28sten Stelle in der geordneten Stichprobe. Und dort steht die Merkmalsausprägung „neutral“ . Denn von der 21sten bis zur 39sten Stelle in der geordneten Stichprobe steht die Ausprägung „neutral“ . Das kann man der Tabelle entnehmen.

maßlos enttäuscht	sehr enttäuscht	enttäuscht	neutral	begeistert	sehr begeistert	maßlos begeistert
3	5	12	19	38	25	8

21. bis 39. Stelle

Also erfahren wir: mindestens ein Viertel aller Festivalbesucher haben, was ihre Zufriedenheit betrifft, die Antwort „neutral oder schlechter“ angegeben.

Wir bestimmen nun das 2. Quartil (den Zentralwert): wir teilen 110 durch 4 und multiplizieren das Ergebnis mit 2 - so erhalten wir 55 (im Endeffekt haben wir durch 2 geteilt). Dieser Wert ist ganzzahlig; den lassen wir so. Das zweite Quartil steht also an der 55sten Stelle in der geordneten Stichprobe. Und dort steht die Merkmalsausprägung „begeistert“ . Denn von der 40sten bis zur 77sten Stelle in der geordneten Stichprobe steht die Ausprägung „begeistert“ . Das kann man der Tabelle entnehmen.

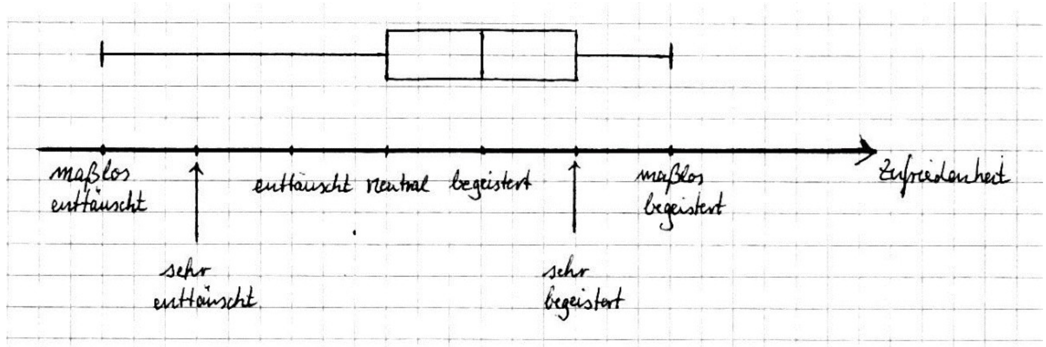
maßlos enttäuscht	sehr enttäuscht	enttäuscht	neutral	begeistert	sehr begeistert	maßlos begeistert
3	5	12	19	38	25	8

40. bis 77. Stelle

Also erfahren wir: mindestens die Hälfte aller Festivalbesucher haben, was ihre Zufriedenheit betrifft, die Antwort „begeistert oder schlechter“ angegeben.

Wir bestimmen nun das 3. Quartil: dazu teilen wir 110 durch 4 und multiplizieren das Ergebnis mit 3 – so erhalten wir den Wert 82,5 . Diesen Wert runden wir auf und erhalten 83. Das dritte Quartil steht also an der 83sten Stelle in der geordneten Stichprobe. Und dort steht die Merkmalsausprägung „sehr begeistert“ . Denn von der 79sten bis zur 102ten Stelle in der geordneten Stichprobe steht die Ausprägung „sehr begeistert“ . Das kann man der Tabelle entnehmen. Also erfahren wir: mindestens drei Viertel aller Festivalbesucher haben, was ihre Zufriedenheit betrifft, die Antwort „sehr begeistert oder schlechter“ angegeben.

Zusammen mit dem Minimum „maßlos enttäuscht“ , dem Maximum „maßlos begeistert“ und den 3 Quartilen (neutral, begeistert und sehr begeistert) können wir nun das Boxplot-Diagramm zeichnen. Auf der Achse wählen wir für die Abstände zwischen den einzelnen Merkmalsausprägungen jeweils 1,5 Zentimeter:

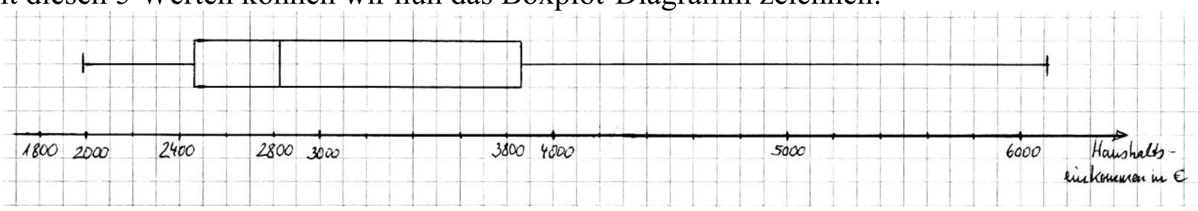


2. Zunächst einmal müssen wir die genannten Haushalteinkommen der Größe nach ordnen:
1980, 2100, 2460, 2460, 2550, 2550, 2744, 2830, 2910, 3200, 3220, 3860, 4390, 4630, 6120
Da insgesamt 15 Haushalte befragt wurden, ist das der Umfang unserer Stichprobe.

Wir bestimmen nun das 1. Quartil: dazu teilen wir 15 durch 4 und erhalten den Wert 3,75 . Diesen Wert runden wir auf und erhalten 4. Das erste Quartil steht also an der 4ten Stelle in der geordneten Stichprobe. Und dort steht die Merkmalsausprägung „2460“ . Also lautet das erste Quartil: 2460€ . Dadurch erfahren wir: mindestens ein Viertel der befragten Haushalte haben ein Haushaltseinkommen von 2460€ oder weniger.

Wir bestimmen nun das 2. Quartil: dazu teilen wir 15 durch 4 und multiplizieren das Ergebnis mit 2 (im Endeffekt teilen wir durch 2) und erhalten so den Wert 7,5 . Diesen Wert runden wir auf und erhalten 8. Das zweite Quartil steht also an der 8ten Stelle in der geordneten Stichprobe. Und dort steht die Merkmalsausprägung „2830“ . Also lautet das erste Quartil: 2830€ . Dadurch erfahren wir: mindestens zwei Viertel (also die Hälfte) der befragten Haushalte haben ein Haushaltseinkommen von 2830€ oder weniger.

Wir bestimmen nun das 3. Quartil: dazu teilen wir 15 durch 4 und multiplizieren das Ergebnis mit 3 und erhalten so den Wert 11,25 . Diesen Wert runden wir auf und erhalten 12. Das dritte Quartil steht also an der 12ten Stelle in der geordneten Stichprobe. Und dort steht die Merkmalsausprägung „3860€“ . Also lautet das dritte Quartil: 3860€ . Dadurch erfahren wir: mindestens drei Viertel der befragten Haushalte haben ein Haushaltseinkommen von 3860€ oder weniger.
Zusammengenommen bedeutet das: Das untere Viertel der befragten Haushalte liegt beim Haushaltseinkommen zwischen 1980€ (Minimum) und 2460€ : das etwa zweite Viertel liegt zwischen 2460€ und 2830€ ; das etwa dritte Viertel liegt zwischen 2830€ und 3860€ und etwa das obere Viertel liegt im Haushaltskommen zwischen 3860€ und 6120€ (Maximum) .
Mit diesen 5 Werten können wir nun das Boxplot-Diagramm zeichnen:



III. 1. Wir lösen die Aufgabe in 6 Schritten:
Schritt 1: Die Ergebnismenge lautet $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, 35, 36\}$.
Schritt 2: Die Anzahl der möglichen Ergebnisse beträgt $m = 37$.
Schritt 3: Die 37 möglichen Ergebnisse haben alle die gleiche Chance (Gleichwahrscheinlichkeit), weil die 37 Fächer in der Drehscheibe alle gleich groß und keines bevorzugt ist.
Schritt 4: Die Ereignismenge enthält alle günstigen Ergebnisse: $E = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.
Schritt 5: Die Anzahl der günstigen Ergebnisse beträgt $g = 7$.
Schritt 6: Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt:
P(wir erhalten eine Quadratzahl) =
Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim einmaligen Drehen beim Roulette eine Quadratzahl zu erhalten, beträgt $^{7}/_{37}$.

2a. Da auf jeder Kante durch die jeweils 20 Schichten 20 kleine Würfel sitzen, liegen jeweils 20 kleine Würfel nebeneinander, 20 kleine Würfel hintereinander und 20 kleine Würfel übereinander. Zusammen sind das $20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$ kleine Würfel.

Wir lösen die Aufgabe in 6 Schritten:

Schritt 1: Die Ergebnismenge lautet $\Omega = \{$Würfel 1, Würfel 2, …., Würfel 7999, Würfel 8000$\}$.

Schritt 2: Die Anzahl der möglichen Ergebnisse beträgt $m = 8000$.

Schritt 3: Die 8000 möglichen kleinen Würfel haben alle die gleiche Chance (Gleichwahrscheinlichkeit), weil alle kleinen Würfel gleich groß sind, sie gut gemischt sind und somit keiner bevorzugt ist.

Schritt 4: Die Ereignismenge enthält alle günstigen Ergebnisse; das sind die kleinen Würfel, die im großen Würfel auf den Seitenflächen, aber nicht auf den Kanten saßen (die kleinen Würfel, die auf den Kanten saßen haben 2 bzw. 3 gefärbte Seitenflächen).

Schritt 5: Die Anzahl der günstigen Ergebnisse beträgt $g = 1944$.

Begründung: Auf jeder Seitenfläche des ursprünglichen großen Würfels saßen $20 \cdot 20 = 400$ kleine Würfel. Und auf den Seitenflächen, aber nicht auf den Kanten saßen jeweils 18 kleine Würfel nebeneinander und 18 hintereinander. Das macht $18^2 = 324$ kleine Würfel. Und da der ursprüngliche große Würfel 6 Seitenflächen besaß, ergibt das $g = 6 \cdot 324 = 1944$ kleine Würfel mit genau einer gefärbten Seitenfläche.

Schritt 6: Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt:

P(der gezogene kleine Würfel hat genau eine gefärbte Seitenfläche) =

Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim einmaligen Drehen beim Roulette eine Quadratzahl zu erhalten, beträgt $^{1944}/_{8000}$ (etwa 24,3%; also etwa ein Viertel aller kleinen Würfel).

2b. Hier ändern sich nur die Schritte 4, 5 und 6:

Schritt 4: Die Ereignismenge enthält alle günstigen Ergebnisse; das sind die kleinen Würfel, die keine blau gefärbte Seitenfläche besitzen, weil sie im großen Würfel im Inneren saßen.

Schritt 5: Die Anzahl der günstigen Ergebnisse beträgt $g = 5832$.

Begründung: Der ursprüngliche große Würfel bestand auf den Kanten aus jeweils 20 kleinen Würfeln nebeneinander, hintereinander und übereinander. Im Inneren dieses großen Würfels befand sich ein etwas kleinerer Würfel, bei dem jeweils 18 kleine Würfel auf den Kanten nebeneinander, hintereinander und übereinander saßen. Es fallen nämlich die heraus, die auf den Seitenflächen saßen – also jeweils einer auf jeder Seite. Von den 20 kleinen Würfeln auf den Kanten des ursprünglichen großen Würfels saßen bleiben also nur 18 auf den Kanten des inneren Würfels übrig. Nun gilt $g = 18^3 = 5832$.

Schritt 6: Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt dann:

P(der gezogene kleine Würfel hat keine gefärbte Seitenfläche) =

Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim einmaligen Drehen beim Roulette eine Quadratzahl zu erhalten, beträgt $^{5832}/_{8000}$ (etwa 72,9%; also fast drei Viertel aller kleinen Würfel).

3. Wir lösen die Aufgabe in 6 Schritten:

Schritt 1: Die Ergebnismenge lautet $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Denn nur diese Zahlen kommen als Augensummen in Frage: 2 ist die kleinstmögliche Augensumme (1 + 1) und 6 ist die größtmögliche Augensumme (3 + 3). Man kann sich an Beispielen klar machen, dass die anderen Zahlen (3, 4, 5) tatsächlich möglich sind als Augensummen, also mögliche Ergebnisse darstellen.

Schritt 2: Die Anzahl der möglichen Ergebnisse beträgt $m = 5$.

Schritt 3: Die 5 möglichen Ergebnisse sind **nicht gleichwahrscheinlich**, weil die 2 nur auf eine Weise entstehen kann (man dreht zweimal die 1), aber die 4 auf 3 Weisen entstehen kann (3 + 1; 2 + 2; 1 + 3).

Also müssen wir verfeinern. Das gelingt am besten mit einem Gitterdiagramm – es zeigt alle möglichen Ergebnisse. Die linke Tabelle zeigt diese 9 möglichen Ergebnisse

1.Wurf / 2.Wurf	1	2	3
1	(1;1)	(2;1)	(3;1)

1.Wurf / 2.Wurf	1	2	3
1	2	3	4

2	(1;2)	(2;2)	(3;2)
3	(1;3)	(2;3)	(3;3)

2	3	4	5
3	4	5	6

Schritt 1‘: Die Ergebnismenge lautet $\Omega = \{(1;1), (1;2), (1;3), (2;1), (2;2), (2;3), (3;1), (3;2), (3;3)\}$.
Schritt 2‘: Die Anzahl der möglichen Ergebnisse beträgt $m = 9$.

Schritt 3‘: Diese 9 Ergebnisse sind gleichwahrscheinlich, weil jeder mögliche Spielverlauf aufgeführt ist und keiner gegenüber einem anderen bevorzugt ist, weil die 3 Sektoren alle gleich groß sind. Jedes Feld in dem linken Gitterdiagramm hat also die Wahrscheinlichkeit $^1/_9$.
Schritt 4‘: Uns interessieren alle 5 möglichen Augensummen, also gilt für die Ereignismenge:
E: die Augensumme beträgt 2, 3, 4, 5 oder 6
Schritt 5‘: Uns interessieren alle 5 Augensummen und in dem rechten Gitterdiagramm (es enthält die Augensummen bei den einzelnen Spielverläufen) können wir für die einzelnen Augensummen die Anzahl der günstigen Ergebnisse ablesen:

$g_{„2“} = 1$, $g_{„3“} = 2$, $g_{„4“} = 3$, $g_{„5“} = 2$, $g_{„6“} = 1$

Schritt 6‘: Damit können wir mit Hilfe der Laplace-Formel die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Augensummen angeben:

Augensumme	2	3	4	5	6	Summe
Wahrscheinlichkeit	$^1/_9$	$^2/_9$	$^3/_9$	$^2/_9$	$^1/_9$	1

4.