Ein Rückblick

1. Familie K. bezieht seine elektrische Energie für den Haushalt vom Energiekonzern AVA. Er bezahlt einen Grundpreis von 140 Euro pro Jahr und einen Arbeitspreis von 0,22 Euro pro Kilowattstunde. Im letzten Jahr hat die Familie K. 7492 kWh elektrische Energie bezogen (Jahresstromverbrauch). Mit Hilfe dieser Informationen kann man die Jahres-Stromkosten K, die die Familie für die bezogene Energie bezahlen muss berechnen; man erhält:

   $K(7492\text{ kWh}) = 7492\text{ kWh} \cdot 0{,}22 + 140\text{ €} = 1648{,}24\text{ €} + 140\text{ €} = 1788{,}24\text{ €}$

   Die Jahresstromkosten hängen natürlich vom Jahresstromverbrauch ab. Mit Hilfe der eben aufgestellten Berechnung kann man eine allgemeine Funktionsgleichung aufstellen, mit der man die Stromkosten in Abhängigkeit vom Stromverbrauch berechnen kann:

   $K(v) = 0{,}22 \cdot v + 140$ v: Jahresstromverbrauch in kWh
   K(v): Jahresstromkosten bei einem Jahresstromverbrauch v in €

   Bei einer solchen Funktion – es handelt sich um eine lineare Funktion der Form $y(x) = m \cdot x + b$ – sprechen wir von einem **linearen Prozess**. Da die Jahresstromkosten mit zunehmendem Jahresstromverbrauch linear steigen, sprechen wir von einem linearen Wachstumsprozess.

2. Eine zylindrische Kerze (Anfangshöhe 80 cm) brennt gleichmäßig ab. Dabei nimmt die Höhe der Kerze alle 6 Stunden um 8 cm ab.
   Ein Beispiel verdeutlicht den Vorgang:
   Im Laufe eines Tages – dass sind 24 Stunden, also 4 6-Stunden-Intervalle – brennt die Kerze um $4 \cdot 8$ cm = 32 cm ab. Die Restlänge nach 24 Stunden beträgt also

   $R(24\text{ Std}) = 80\text{ cm} – 4 \cdot 8\text{ cm} = 80\text{ cm} - \ \cdot 8\text{ cm}$

   Auch bei diesem Prozess können wir eine Funktion aufstellen, die diesen Abnahmeprozess beschreibt. Sie lautet:

   $R(t) = 80 - \ \cdot 8 = 80 - \ \cdot t$ t: Brennzeit seit Beginn des Abbrennvorganges in h
   R(t): Restlänge der Kerze zur Zeit t in cm

   Bei einer solchen Funktion – es handelt sich um eine lineare Funktion der Form $y(t) = m \cdot t + b$ – sprechen wir von einem **linearen Prozess**. Da die Restlänge mit zunehmender Abbrenndauer linear abnimmt, sprechen wir von einem linearen Abnahmeprozess.

3. Das Verlagsunternehmen Gruner und Jahr druckt und vertreibt die Jugendzeitschrift BRAVO. Zur Zeit hat das Unternehmen 84.000 Abonnenten dieser Zeitschrift. Zu einem Jahrespreis von 36 € (für 12 Hefte) haben diese Jugendlichen die Zeitschrift abonniert. Durch die Umfrage eines Wirtschaftsforschungsinstitutes unter 4200 Jugendlichen wurde herausgefunden, dass das Verlagsunternehmen mehr Abonnenten rekrutieren könnte, wenn es den Abonnementpreis senkte. Und zwar stiege die Abonnentenzahl pro Senkungsstufe des Jahrespreises um 2€ um durchschnittlich 8000 an. Ein einfaches Beispiel zeigt, das Handlungsbedarf besteht:
   Beim bisherigen Preis von 36€ und der bisherigen Abonnentenzahl von 84.000 hat das Unternehmen aus dem Abonnentenverkauf von $36 \cdot 84.000 = 3.024.000$ €.
   Senkte das Unternehmen den Abonnentenpreis um 2 Stufen – also um 4€ auf dann 32€, dann stiege die Anzahl der Abonnenten auf 100.000 . Und die Einnahmen aus dem Abonnentenverkauf stiegen auf $32 \cdot 100.000 = 3.200.000$ € !!!!

   Für das Verlagsunternehmen stellt sich nun die Frage: Sollte man den Abonnentenpreis senken und um wieviel Stufen sollte man ihn senken, um möglichst hohe Einnahmen aus dem Abonnentenverkauf zu erzielen ?

   Die mathematische Analyse dieses Problems zeigt, dass sich die Einnahmen des Verlagsunternehmens aus dem Abonnentenverkauf in Abhängigkeit von der Anzahl x der Senkungsstufen für den Preis durch folgende Funktion beschreiben lassen:

   $E(x) = -16.000 \cdot n^2 + 120.000 \cdot n + 3.024.000$
   dabei bedeuten: n: Anzahl der Senkungsstufen für den Abonnenten-Preis um jeweils 2€
   E(n): Einnahmen aus dem Abonnentenverkauf bei n Senkungsstufen in €

   Bei einer solchen Funktion – es handelt sich um eine quadratische Funktion der Form $y(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ – sprechen wir von einem **quadratischen Prozess**.

3. Wir wollen uns jetzt mit einer weiteren Gruppe von Prozessen beschäftigen – den sogenannten **exponentiellen Prozessen**. Bei diesen Prozessen geht es häufig um eine Bestandsgröße (z.B. eine Bevölkerungszahl), die sich im Laufe der Zeit t in einer bestimmten Dynamik entwickelt. Prozesse mit dieser Dynamik werden beschrieben durch Funktionen der Form

   $B(t) = a \cdot b^t$ t: Zeit seit Beginn einer Entwicklung in Zeiteinheiten
   B(t): Bestand zur Zeit t in Einheiten

   Wir unterscheiden 2 unterschiedliche Gruppen von exponentiellen Prozessen; die **exponentiellen Wachstumsprozesse** und die **exponentiellen Abklingprozesse**.
   Zu den **exponentiellen Wachstumsprozessen** gehören z.B. Entwicklungen von Bevölkerungszahlen, das Wachstum von Bakterien- und Virenpopulationen, das Wachstum von Kapitalbeträgen bei sogenannter Zinsesverzinsung, das Wachstum des Weltenergieverbrauchs und viele andere Abläufe.
   Zu den **exponentiellen Abklingprozessen** gehören z.B. die Abnahme eines radioaktiven Präparates, die Abnahme der Intensität von Röntgenstrahlung oder radioaktiver Strahlung beim Eindringen in Materieschichten und vieles andere Abläufe mehr.

   Wir wollen jetzt herausarbeiten, wodurch solche exponentiellen Prozesse charakterisiert sind und wie man sie mathematisch beschreiben kann.
   Dazu müssen wir eine kleine **Rückschau auf die Prozentrechnung** machen.

::

Weil die alte Waschmaschine defekt ist und eine Reparatur nicht mehr lohnt, kauft Herr K. eine neue Waschmaschine. Die Maschine kostet laut Listenpreis 458 €. Für den Käufer kommt dann noch die Mehrwertsteuer dazu, die der Verkäufer an das Finanzamt abführen muss. Der Mehrwertsteuersatz beträgt zurzeit 19% vom Listenpreis der Ware. Wie hoch ist dann der Verkaufspreis für Herrn K. ?
Wir lösen diese Aufgabe mit einer Dreisatzrechnung:

Gesucht: Verkaufspreis (also der Listenpreis zuzüglich der Mehrwertsteuer)
Gegeben: Listenpreis: 458 € (das ist der Grundpreis (100%), auf den die Mehrwertsteuer aufgeschlagen wird)
Mehrwertsteuersatz: 19 (%)

Wenn wir mit diesem Prozentsatz (p = 19) rechneten, dann berechneten wir nur die Mehrwertsteuer für die Waschmaschine und müssten anschließend die Mehrwertsteuer zum Listenpreis dazurechnen. (Du kannst diesen Weg ja einmal selbst durchrechnen)
Wenn wir aber direkt den Verkaufspreis berechnen wollen, so müssen wir mit dem Prozentsatz p = 119 = 100 + 19 rechnen. Denn dieser Prozentsatz gehört zum Verkaufspreis, weil auf den Listenpreis (100%) die Mehrwertsteuer (19% vom Listenpreis) ***dazugerechnet*** *wird.*

Das folgende Bild zeigt diesen Zusammenhang:

Listenpreis (100%)
MWst. (19%) +

Verkauspreis (119%)

Wir rechnen also mit dem Prozentsatz für den Verkaufspreis – also 119 (%). Die Rechnung läuft dann so:

	Prozentsatz p (in %)	Prozentwert P in €	
: 100	100	458	: 100
mal 119	1	$\frac{458}{100}$	mal 119
	119	$\frac{458}{100} \cdot 119$	

Für den Verkaufspreis erhalten wir dann = 545,02 € .
Dieses Ergebnis ist nicht das für und Interessante; interessant für uns ist die Form der Endformel . Denn diese Endformel können wir ein Wenig umschreiben:

Wir vertauschen die
Zahlen, die im Zähler
Stehen

Für 119 schreiben
Wir 100 + 19

So wie man 2 Brüche mit
gleichem Nenner zusammen-
fassen kann, kann man auch
einen Bruch in 2 gleich-
namige Brüche zerlegen:

wir ersetzen durch 1

Diese Umschreibung zeigt uns:

Wenn man einen Grundwert – in unserem Falle die 458€ - um 19% des Grundwertes erhöhen will, so muss man den Grundwert nur mit dem Multiplikator multiplizieren.
Und wenn man den Grundwert um 28% erhöhen wollte, so hieße der Multiplikator .
Und wenn man den Grundwert um 89% erhöhen wollte, so hieße der Multiplikator .
Und wenn man den Grundwert um p% erhöhen wollte, so hieße der Multiplikator .
Und das gilt für jeden beliebigen Grundwert.

- -

Im Jahr 2018 wurden in Bremerhaven im Container-Terminal 3,45 Millionen Container umgeschlagen. Im Jahr 2018 sank der Umschlag an Containern um 2,1% des Wertes aus dem Vorjahr. Wieviel Container wurden im Bremerhavener Container-Terminal im Jahre 2018 umgeschlagen ?

Wir lösen diese Aufgabe mit einer Dreisatzrechnung:

Gesucht: Umschlagzahl für das Jahr 2018

Gegeben: Umschlagzahl für das Jahr 2017: 3,45 Mio (das ist der Grundwert (100%)

Prozentsatz für den Umschlagrückgang: 2,1 (%)

Wenn wir mit diesem Prozentsatz (p = 2,1) rechneten, dann berechneten wir nur um wieviel der Containerumschlag im Jahr 2018 abgenommen hat und müssten anschließend diesen Wert von der Umschlagzahl aus dem Jahre 2017 subtrahieren. (Du kannst diesen Weg ja einmal selbst durchrechnen.)

Wenn wir aber direkt die Umschlagzahl für 2018 berechnen wollen, so müssen wir mit dem Prozentsatz p = 97,9 = 100 – 2,1 rechnen. Denn dieser Prozentsatz gehört zur Umschlagszahl für das Jahr 2018, weil von der Umschlagzahl aus dem Jahre 2017 (100%) der Umschlagrückgang (2,1% von der Umschlagzahl aus dem Jahre 2017) ***abgezogen*** *wird.*

Das folgende Bild zeigt diesen Zusammenhang:

$\boxed{\text{Umschlagzahl für das Jahr 2017 (100\%)}}$

$\boxed{\text{Rückgang (2,1\%)}}$ -

$\boxed{\text{Umschlagzahl für das Jahr 2018 (97,9\%)}}$

Wir rechnen also mit dem Prozentsatz für die Umschlagzahl für das Jahr 2018 – also 97,9 (%). Die Rechnung läuft dann so:

	Prozentsatz p (in %)	Prozentwert P in Mio Stück	
	100	3,45	
: 100	1	$\frac{3,45}{100}$	: 100
mal 97,9	97,9	$\frac{3,45}{100} \cdot 97,9$	mal 97,9

Für die Umschlagszahl für das Jahr 2018 erhalten wir dann = 3,37755 Mio .
Dieses Ergebnis ist nicht das für und Interessante; interessant für uns ist die Form der Endformel . Denn diese Endformel können wir ein Wenig umschreiben:

Wir vertauschen die Zahlen, die im Zähler Stehen

Für 97,9 schreiben Wir 100 – 2,1

So wie man 2 Brüche mit gleichem Nenner zusammenfassen kann, kann man auch einen Bruch in 2 gleichnamige Brüche zerlegen:

wir ersetzen durch 1

Diese Umschreibung zeigt uns:

Wenn man einen Grundwert – in unserem Falle die 3,45 Mio - um 2,1% des Grundwertes verringern will, so muss man den Grundwert nur mit dem Multiplikator multiplizieren.
Und wenn man den Grundwert um 12% verringern wollte, so hieße der Multiplikator .
Und wenn man den Grundwert um 73% verringern wollte, so hieße der Multiplikator .
Und wenn man den Grundwert um p% verringern wollte, so hieße der Multiplikator .
Und das gilt für jeden beliebigen Grundwert.

Ende der Rückschau !

::

Jetzt kommt was :

Beispiel für einen Exponentiellen Wachstumsprozess

Nach neuesten Veröffentlichungen der UNO betrug der jährliche Weltenergiebedarf im Jahre 2010 140 Petawattstunden (PWh). Seit 2010 ist dieser Bedarf jährlich um 1,4% des Vorjahreswertes gestiegen. Das heißt: im Jahre 2011 kamen zu dem jährlichen Weltenergiebedarf aus dem Jahre 2010 noch 1,4% dieses Wertes hinzu und in jedem Folgejahr entsprechend [*]. Wie lauten dann die Bedarfszahlen aus den Folgejahren ?

…………………………………………………………………………………………………….

[*] Man geht im Übrigen davon aus, dass diese jährliche Wachstumsrate von 1,4 % des Vorjahreswertes noch bis zum Jahre 2035 anhalten wird (Prognose), weil der Lebensstandard in den aufstrebenden Entwicklungs- und Schwellenländern entsprechend steigt und damit auch der Energiebedarf.)

Diese Frage beantworten wir wie folgt:

Bedarf im Jahr 2010: 140 PWh – das ist der Grundwert für das Jahr 2011

Bedarf im Jahr 2011: Hier steigt der Bedarf um 1,4% des Vorjahreswertes 140 PWh an, d.h. es erhöht sich der Grundwert um 1,4% des Grundwertes. Nach unserer Merkregel „Merke 1“ müssen wir dann den Grundwert für das Jahr 2010 (also 140 PWh) mit dem Multiplikator multiplizieren. Der Bedarfswert für das Jahr 2011 lautet dann 140 · Das sind ausgerechnet 141,96 PWh. Und das ist dann der Grundwert für das Jahr 2012. Wir benutzen im Weiteren aber die Schreibweise 140 · .

Bedarf im Jahr 2012: Hier steigt der Bedarf um 1,4% des Vorjahreswertes 140 · an, d.h. es erhöht sich der Grundwert um 1,4% dieses Grundwertes. Nach unserer Merkregel „Merke 1“ müssen wir dann den Grundwert für das Jahr 2011 (also 140 ·) mit dem Multiplikator multiplizieren. Der Bedarfswert für das Jahr 2012 lautet dann 140 ·
Das sind ausgerechnet 143,947 PWh. Und das ist dann der Grundwert für das Jahr 2013. Wir benutzen im Weiteren aber die Schreibweise
140 · oder in der Kurzschreibweise
140 · .

Bedarf im Jahr 2013: Hier steigt der Bedarf um 1,4% des Vorjahreswertes 140 · an, d.h. es erhöht sich der Grundwert um 1,4% dieses Grundwertes. Nach unserer Merkregel „Merke 1“ müssen wir dann den Grundwert für das Jahr 2012 (also 140 ·) mit dem Multiplikator multiplizieren. Der Bedarfswert für das Jahr 2013 lautet dann 140 ·
Das sind ausgerechnet 145,963 PWh. Und das ist dann der Grundwert für das Jahr 2014. Wir benutzen im Weiteren aber die Schreibweise
140 · oder in der Kurzschreibweise
140 · .

Bedarf im Jahr 2014: Hier steigt der Bedarf um 1,4% des Vorjahreswertes 140 · an, d.h. es erhöht sich der Grundwert um 1,4% dieses Grundwertes. Nach unserer Merkregel „Merke 1“ müssen wir dann den Grundwert für das Jahr 2013 (also 140 ·) mit dem Multiplikator multiplizieren. Der Bedarfswert für das Jahr 2013 lautet dann 140 ·
Das sind ausgerechnet 148,006 PWh. Und das ist dann der Grundwert für das Jahr 2015. Wir benutzen im Weiteren aber die Schreibweise
140 · oder in der Kurzschreibweise
140 · .

Ich glaube, jetzt erkennt man, wie es weitergehen wird. Mit jedem Jahr kommt der Multiplikator einmal hinzu – und der Exponent der Potenz erhöht sich jedes Mal um 1.
Die folgende Tabelle gibt darüber eine Übersicht und führt uns zur allgemeinen Formel:

Jahr	Zeit seit 2010	Jährlicher Weltenergiebedarf in PWh
2010	0	140
2011	1	140 ·
2012	2	140 ·
2013	3	140 ·
2014	4	140 ·
:	:	:
2020	10	140 ·
:	:	:
:	:	:
2010 + t	t	140 ·

Wir haben also eine Formel hergeleitet, mit der man den jährlichen Weltenergiebedarf berechnen kann – auf der Basis der oben genannten Prognose. Die Formel lautet:

$E(t) = 140 \cdot$ t: Zeit seit 2010 in Jahren
E(t): jährlicher Weltenergiebedarf zur Zeit t in PWh

Verallgemeinerung:
Schritt 1: Bei einem anderen Anfangswert (nicht 140 PWh, sondern E_0) und einer anderen Wachstumsrate (nicht 1,4%, sondern p%) würde die Formel lautet:

$E(t) = E_0 \cdot$ t: Zeit seit 2010 in Jahren
E(t): jährlicher Weltenergiebedarf zur Zeit t in Pwh

Schritt 2: Wenn wir einen Prozess betrachten, bei dem ein Anfangsbestand B_0 in festen Zeitabschnitten (Jahren, Monaten, Stunden, …) so steigt, dass in jeder Zeiteinheit zu dem Bestand, der zu Beginn der Zeiteinheit existierte, stets p% dieses Bestandes hinzukommen, dann beschreibt die folgende Funktion diesen Prozess:

$B(t) = B_0 \cdot$ t: Zeit in Zeiteinheiten

B(t): Bestand zur Zeit t in Einheiten

::

Zurück zu dem Beispiel des jährlichen Weltenergiebedarfs. Mit der gefundenen Funktion kann man nun eine Reihe von Fragestellungen klären:

Frage 1: Wie groß wird der jährliche Weltenergiebedarf im Jahre 2028 sein (vorausgesetzt das Wachstum hält bis dahin unverändert an) ?

Lösung: 2028 ist 18 Jahre nach 2010 – also ist t = 18. Also setzen wir für t in die Funktionsgleichung den Wert 18 ein und berechnen das Ergebnis:

$E(18) = 140 \cdot$

Antwort: Im Jahre 2018 wird der jährliche Weltenergiebedarf – bei unverändertem Wachstum – etwa 180 PWh betragen.

Frage 2: In welchem Jahr wird der jährliche Weltenergiebedarf – bei unverändertem Wachstum – auf 250 PWh angestiegen sein ?

Lösung: Hier müssen wir für E(t) den Wert 250 PWh einsetzen und für t die Variable t_0 . Wir erhalten dann die Gleichung $250 = 140 \cdot$, die wir nach t_0 auflösen müssten. Aber wir haben noch nicht besprochen wie das geht. Deswegen gehen wir hier einen anderen Weg: Diese Aufgabe lösen wir durch **Probieren** mit Hilfe einer Tabelle. Wir setzen für t einen ausgedachten Zahlenwert ein und berechnen den dazugehörigen Weltenergiebedarf. Sollte der berechnete Bedarf über 250 PWh liegen, müssen wir den t-Wert verringern; sollte der berechnete Bedarf unter 250 PWh liegen, so müssen wir den t-Wert erhöhen. So tasten wir uns an das Ergebnis heran:

Jahr	Zeit seit 2010	Jährlicher Weltenergiebedarf in PWh
2035	25	198,188 (zu klein)
2045	35	227,749 (zu klein)
2060	50	280,560 (zu groß)
2055	45	261,719 (zu groß)
2051	41	247,562 (zu klein)
2052	42	251,028 (zu groß

Antwort: Wir können aber hier abbrechen und können sagen: im Jahre 2051 wird der angesagte Wert von 250 PWh noch nicht erreicht sein, im Jahre 2052 wird er aber bereits überschritten werden. In der Zwischenzeit wird der jährliche Weltenergiebedarf den Wert 250 PWh erreichen. Wir können uns zum Beispiel vorstellen, die genannten Bedarfzahlen beziehen sich immer auf die Mitte des jeweiligen Jahres. Dann würde der Wert 250 PWh irgendwann zwischen Mitte 2051 und Mitte 2052 erreicht.

Frage 3: Um wieviel Prozent ist der jährliche Weltenergieverbrauch in den Jahren von 2012 bis 2018 angestiegen ?

Lösung: Zunächst berechnen wir die Bedarfszahlen für die Jahre

2012 (hier ist t = 2: $E(2) = 140 \cdot = 143{,}947$ PWh (speichern !)

und 2018 (hier ist t = 8: $E(8) = 140 \cdot = 156{,}470$ PWh (speichern)

Dann berechnen wir die Steigerungsrate in Prozent: Dabei ist der Wert aus 2012 der Grundwert und der Wert aus 2018 der Prozentwert. Gesucht ist der zum Prozentwert zugehörige Prozentsatz p. Wir erhalten dann:

Prozentsatz p (in %)	Prozentwert P in PWh
100	143,947
	1
	156,470

Wir erhalten: p = 108,6995 (%). Aber dieser Wert gibt an, auf welchen Wert der Bedarf in Prozent (bezogen auf 2012) gestiegen ist. Um herauszufinden, um wieviel der Bedarf (in Prozent bezogen auf 2012) gestiegen ist, muss man 100 subtrahieren und erhält dann 8,6995 (%) .

Antwort: Zwischen den Jahren 2012 und 2018 stieg der jährliche Weltenergiebedarf um etwa 8,7% gegenüber dem Wert von 2012 gestiegen.

::

Übungen:

Frage 1: Wie groß wird der jährliche Weltenergiebedarf im Jahre 2038 sein (vorausgesetzt, das Wachstum hält bis dahin unverändert an) ?

Frage 2: In welchem Jahr wird der jährliche Weltenergiebedarf – bei unverändertem Wachstum – sich gegenüber 2010 verdoppelt haben bzw. wann wird er sich vervierfacht haben ?

Frage 3: Um wieviel Prozent ist der jährliche Weltenergieverbrauch in den Jahren von 2015 bis 2032 angestiegen ?

Frage 4: Der jährliche Energiebedarf in Uskmenien betrug 2005 0,392 PWh. Für Uskmenien betrug die jährliche Wachstumsrate 0,84 %; d.h. der Energiebedarf des Landes stieg jedes Jahr um 0,84% des Vorjahreswertes an. Stelle die Funktionsgleichung auf, die diesen Prozess beschreibt.

Frage 5: Der jährliche Energiebedarf in Turkasien wird seit 1996 durch die Funktion

$E(t) = 7{,}53 \cdot$ t: Zeit seit 1996 in Jahren

E(t): jährlicher Energiebedarf in Turkasien zur Zeit t in PWh

Was kannst Du dieser Funktionsgleichung an Informationen entnehmen ?

Lösungen:

1. etwa 237,449 PWh
2. nach etwa 50 Jahren bzw. nach etwa 100 Jahren (Fällt Dir was auf ?)
3. 2015: 150,078 PWh ; 2032: 190,092 PWh ; p = 126,662 (%) bzw. p = 26,662 (%)
4. $E(t) = 0{,}392 \cdot$ t: Zeit seit 2005 in Jahren

   E(t): jährlicher Energiebedarf in Uskmenien zur Zeit t in PWh
5. a) Der jährliche Energiebedarf in Turkasien betrug am Anfang – also 2005 – 7,53 PWh.

   b) Die jährliche Wachstumsrate in Turkmenien beträgt 2,3 % .